第 38 卷第 3 期 工 程 热 物 理 学 报 Vol.38, No.3
2017 年 3 月 JOURNAL OF ENGINEERING THERMOPHYSICS Mar., 2017

存在非加热起始段的热平板着火分析

李尚鹏　卓建坤　唐 勇　姚 强

(清华大学热科学与动力工程教育部重点实验室，北京　100084)

摘　要　对存在非加热起始段的热平板着火问题进行了理论分析，推导出具有局部相似性的解，并采用基于高活化能假设的匹配渐进展开法进一步得到了理论解。非加热的起始段可以降低气流通过加热段时壁面附近的流速，从而更容易引发着火。结果表明，当常温起始段长度 L_χ 和一般的恒温热平板着火距离 $\chi_{\rm I}$ 比值 $\chi_{\rm I}/L_\chi = {\rm O}(\epsilon)$，此时着火距离 $\chi_{\rm L,I}$ 和 L_χ 的平方根成反比。通过数值计算发现，当 $\chi_{\rm I}/L_\chi < 3$，局部相似解的误差不超过 5%。本文的分析方法可以进一步应用到二维楔形体、三维旋转体边界层等更为复杂边界条件下的着火问题。

关键词　热表面着火；非加热起始段；局部相似；摄动分析

中图分类号: TK123　　**文献标识码**: A　　**文章编号**: 0253–231X(2017)03–0657–08

Thermal-ignition Analysis in a Boundary Layer on a Hot Plate with an Unheated Inlet Section

LI Shang-Peng　ZHUO Jian-Kun　TANG Yong　YAO Qiang

(*Key Laboratory for Thermal Science and Power Engineering of Ministry of Education, Tsinghua University, Beijing* 100084, *China*)

Abstract The problem of thermal-ignition on a boundary-layer at a hot plate with an unheated inlet has been considered, and a local similar solution is derived. An explicit expression for the minimum ignition distance has been derived by using matched asymptotic analysis in the realistic limit of large activation energy. The unheated inlet section can reduce the flow velocity at the boundary-layer of the inlet of heating section, and then lead to easily ignited. It is shown that when the ratio between the length of unheated inlet section L_χ and the ignition distance on a isothermal hot plate $\chi_{\rm I}$ is large enough, the ignition distance $\chi_{\rm L,I}$ is inversely proportional to the square root of L_χ. According to numerical results, the difference between the local similar solutions is less than 5% when $\chi_{\rm I}/L_\chi < 3$. Although attention in this paper is confined to the flat-plate problem, it should be noted that this analytical method can be applied to more general cases, such as wedge flow ignition problems.

Key words　thermal ignition of hot surface; unheated starting length; local similar; asymptotic analysis

符　号　表

ν	化学计量系数；	a	在式 (22) 中定义的量；
W	摩尔质量；	h_1	在式 (19) 中定义的函数；
p	环境压力；	λ	$\lambda = x$，用于坐标变换；
R^0	通用气体常数；	F	在式 (21) 中定义的函数；
B	反应速率表达式中常数之一；	F_1	在式 (25) 中定义的函数；
$\bar{W}$	平均摩尔质量；	F_2	在式 (25) 中定义的函数；
T	温度或者无量纲温度；	η_2	在式 (26) 中定义的量；
E_a	总包反应活化能；	W	在式 (26) 中定义的函数；
Y	质量分数；	χ	广义着火距离，在式 (32) 中定义；
ρ	气流密度；	K	在式 (34) 中定义的量；

收稿日期：2016-12-15; **修订日期**：2017-02-19
基金项目：国家重点基础研究发展计划 (973) 资助项目 (No.2013CB228502)，国家自然科学基金 (No.51576111)
作者简介：李尚鹏（1993– ），男，博士研究生，主要从事气体火焰相关研究。　**通信作者**：卓建坤，助理研究员，zhuojk@mail.tsinghua.edu.cn

u	x 方向速度；
v	y 方向速度；
ω	化学反应速率，在式 (5) 中定义；
$\tilde{T}$	无量纲温度，$\tilde{T}=c_pT/h_c^0$；
L	非加热段长度；
$L(\cdot)$	算子，在式 (4) 中定义；
A	在式 (6) 中定义的量；
α	反应速率表达式中温度指数或者在式 (15) 中定义的量；
h	焓值；
c_p	比定压热容；
s	在式 (8) 中定义的量；
η	在式 (8) 中定义的量；
h_c^0	热值；
U	主流速度；
μ	动力黏性系数；
ψ	流函数，在式 (9) 中定义；
f	无量纲流函数，在式 (10) 中定义；
g	在式 (15) 中定义的函数；
η_1	在式 (18) 中定义的量；
β	热扩散参数，$\beta=T_{\rm w}-T_\infty$；
ε	摄动分析中的小量，$\epsilon=T_{\rm w}^2/T_a$；
τ	$\tau=x$，用于坐标变换；
ζ	$\zeta=x$，用于坐标变换；
ξ	$\xi=f'(\eta)$；
θ	热边界层内侧反应区的一级摄动温度；
$\varDelta$	热平板着火问题中的邓克尔数；
上标	
0	热力学标准状态；
下标	
i	第 i 种组分；
∞	无穷远；
w	壁面；
F	燃料；
O	氧化剂；
P	生成物；
I	着火状态；
L	非加热起始段；
χ	广义距离坐标；

0 前　言

带有化学反应的边界层流动问题，需要求解高度非线性的偏微分方程组。反应源项的存在破坏了一般无反应边界层流动中的相似性，沿流线方向各个纵截面上的物理量不再具有简单的对应关系。为了理解该问题中各个参数之间的相互作用，减轻数值计算的负担，发展出了多种理论分析方法。

Marble[1] 采用级数展开法分析了层流条件下，高温惰性气体和低温可燃气体的混合层流动中可燃气体的点燃以及火焰面的发展，在忽略了沿流线方向的扩散后，计算出从开始混合到点火的着火距离；而对于着火点之后的火焰面发展，则考虑了沿流线方向的扩散，并应用冯. 卡门的积分方法对边界层进行积分求解。Toong[2] 使用迭代法对热平板边界层着火问题进行求解，可以通过低精度的解迭代得到较高精度的解。Law[3] 采用基于高活化能假设的匹配渐进分析法，证明了壁面附近温度梯度为 0 适合作为着火判据，并由此得到了滞止边界层着火的解析解。Law 使用该方法还求解了热平板着火 [4]、一维固体表面瞬态着火 [5] 等着火问题。因此，匹配渐进分析法更能体现高活化能化学反应一般集中在狭窄、高温空间区域的物理事实，求解过程相对简单。

上述炽热表面着火问题的理论解都是建立在热表面温度为均一恒定的假设之上，然而在实际的工程应用中，炽热表面着火中的热表面并不是恒定温度的，可燃气流在经过热表面之前，往往已经有了一定的速度边界层厚度。即使对于较为简单的热平板着火实验，也难以让热边界层和速度边界层从同一个位置开始发展，因此，研究人员在平板加热段的前缘设置了速度边界层的抽吸口 [6,7]，不仅增加了实验装置的复杂度，还可能对流场产生干扰。所以，有必要研究存在常温非加热的起始段对炽热表面着火过程的影响。

本文基于一般形式的边界层反应流偏微分方程组，推导出了热边界层发展滞后于速度边界层时的局部相似解，进一步采用基于高活化能假设的匹配渐近展开法得到了此时着火距离的理论解。最后利用数值计算对局部相似解的准确性进行验证。

1 基本控制方程

如图 1 所示，本文所研究的物理问题是：层流条件下，一定配比的可燃预混气以恒定的速度，通

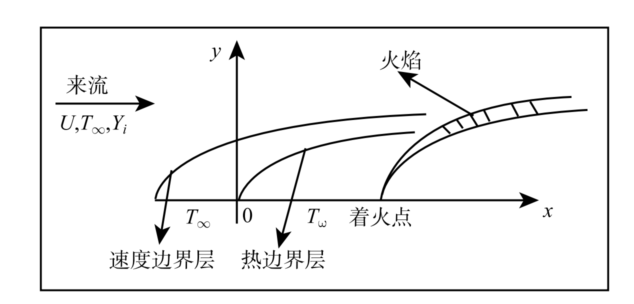


图 1 存在非加热起始段热平板着火示意图

Fig. 1 Schematic of thermal-ignition by an isothermal flat plate with an unheated inlet section

过无限流域中的一块平板形成边界层反应流，平板不可渗透且无催化作用，平板存在与来流气温相同的非加热起始段，剩余部分为恒定温度的高温段。当平板的加热段温度足够高、气流通过的距离足够长，在平板某个位置的附近将会引发着火，产生火焰。本文采用稳态的方法分析着火的临界状态，并不考虑着火之后预混火焰在边界层中的传播。

为了简化分析过程，考虑一步总包不可逆反应，只有两种反应物，分别是氧化剂 [O] 和燃料 [F]，只有一种产物 [P]，化学反应式为：

$$\nu_{\mathrm{O}}\,[\mathrm{O}] + \nu_{\mathrm{F}}\,[\mathrm{F}] \rightarrow \nu_{\mathrm{P}}\,[\mathrm{P}] \tag{1}$$

根据阿累尼乌斯定律，各个反应物的反应速率正比于：

$$\frac{W_{\mathrm{F}}\nu_{\mathrm{F}}}{W_{\mathrm{O}}^{\nu_{\mathrm{O}}}W_{\mathrm{F}}^{\nu_{\mathrm{F}}}}\left(\frac{p\bar{W}}{R^0}\right)^{\nu_{\mathrm{O}}+\nu_{\mathrm{F}}} BT^{\alpha-(\nu_{\mathrm{O}}+\nu_{\mathrm{F}})}\exp\left(-\frac{E_a}{R^0T}\right)Y_{\mathrm{O}}^{\nu_{\mathrm{O}}}Y_{\mathrm{F}}^{\nu_{\mathrm{F}}} \tag{2}$$

其中，B 和 α 皆是常数，R^0 是通用气体常数，W_i 是第 i 种组分的摩尔质量，v_i 是第 i 种组分的化学计量系数，Y_i 是反应流中第 i 种组分的质量分数，E_a 是该总包反应的活化能。

采用 Law[4] 中的假设条件，可以推导出边界层反应流基本方程组为：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho u}{\partial x} + \dfrac{\partial \rho v}{\partial y} = 0 \\ L\,(u) = 0 \\ L\,(Y_{\mathrm{F}}) = -\omega \\ L\,(T) = \omega \end{cases} \tag{3}$$

其中无量纲化的温度 $\tilde{T}$ 记为 $\tilde{T} = c_pT/h_c^0$，在不引起歧义的情况下仍旧使用原有符号 T，ρ 是反应流的密度，算子 $L\,(\cdot)$ 定义为：

$$L\,(\cdot) = \left(\rho u\frac{\partial}{\partial x} + \rho v\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\mu\frac{\partial}{\partial y}\right) \tag{4}$$

方程组 (3) 里能量方程、组分方程中反应源项的表达式为：

$$\omega\,(T, Y_{\mathrm{O}}, Y_{\mathrm{F}}) = AT^{\alpha-(\nu_{\mathrm{O}}+\nu_{\mathrm{F}})}\left(\frac{h_c^0}{c_p}\right)^{\alpha-(\nu_{\mathrm{O}}+\nu_{\mathrm{F}})}\exp\left(-\frac{E_a}{R^0T}\right)Y_{\mathrm{O}}^{\nu_{\mathrm{O}}}Y_{\mathrm{F}}^{\nu_{\mathrm{F}}}\;; \tag{5}$$

$$A = \frac{W_{\mathrm{F}}\nu_{\mathrm{F}}}{W_{\mathrm{O}}^{\nu_{\mathrm{O}}}W_{\mathrm{F}}^{\nu_{\mathrm{F}}}}\left(\frac{p\bar{W}}{R^0}\right)^{\nu_{\mathrm{O}}+\nu_{\mathrm{F}}} B$$

$$h_c^0 = h_{\mathrm{F}}^0 + \frac{W_{\mathrm{O}}\nu_{\mathrm{O}}}{W_{\mathrm{F}}\nu_{\mathrm{F}}}h_{\mathrm{O}}^0 - \frac{W_{\mathrm{P}}\nu_{\mathrm{P}}}{W_{\mathrm{F}}\nu_{\mathrm{F}}}h_{\mathrm{P}}^0 \tag{6}$$

其中，c_p 是混合流的比定压热容，已经假设了各个组分的比定压热容均相等且为定值，p 是环境压强，是 h_i^0 第 i 种组分的生成焓，h_c^0 相当于该燃料的热值。

热平板前面存在常温起始段，长度为 L，将坐标系的原点设在加热段进口，此时的边界条件如下：

$$\begin{cases} x = -L: \quad u = U, \quad v = 0, \quad Y_{\mathrm{F}} = Y_{\mathrm{F},\infty} \\ y = 0: \quad u = v = 0, \quad \dfrac{\partial Y_{\mathrm{F}}}{\partial y} = 0 \\ -L < x < 0, \quad y = 0: \quad T = T_\infty \\ x \geqslant 0, y = 0: \quad T = T_{\mathrm{w}} \end{cases} \tag{7}$$

可以发现动量方程的边界条件仍然具有一致性，可以沿用典型的 Howarth-Dorodnitsyn 坐标变换 $(x, y) \rightarrow (s, \eta)$ 让动量方程与能量方程解耦，其中：

$$\begin{cases} s = U\rho_\infty\mu_\infty\,(x + L) \\ \eta = \sqrt{\dfrac{U}{2\rho_\infty\mu_\infty\,(x+L)}}\displaystyle\int_0^y \rho\,(x, y')\,\mathrm{d}y' \end{cases} \tag{8}$$

ψ 是流函数，令

$$\rho u = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \rho v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{9}$$

由此可以自动满足可压缩的连续性方程。

在新坐标系下的无量纲流函数 $f\,(s, \eta)$ 为：

$$f\,(s, \eta) = \frac{\psi\,(x, y)}{\sqrt{2s}} \tag{10}$$

Chapman[8] 基于实际气体的热物理性质给出一个重要假设，可以简化二阶偏微分方程组中的二阶扩散项：

$$\rho\mu = \rho_\infty\mu_\infty \tag{11}$$

由此，方程组 (3) 中的动量方程可以化为典型布劳休斯方程的形式：

$$\frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}\eta^3} + f\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}\eta^2} = 0$$

$$f\,(0) = 0, f'(0), f'(\infty) = 1 \tag{12}$$

然而由于温度方程的边界条件并不是一致的，温度方程和组分方程不能通过上述变换直接得到相似解。

2 局部相似解

将无量纲流函数在壁面处展开：$f(\eta) = \frac{1}{2}f''(0)\eta^2 - \frac{1}{5!}f''^2(0)^5 + \mathrm{O}(\eta^7)$，计算 u 时只取 f 的第一个非零项，即假设热边界层中沿平板方向的速度 u 与 η 线性相关 (在不可压流动中，相当于物理空间中的速度 u 在 y 方向是线性分布的)：

$$u = U(x)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\eta} \approx U(x)\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}\eta^2}|_{\eta=0}\cdot\eta \tag{13}$$

该假设的合理性源自三个方面：

1) 由于非加热起始段 L，热边界层厚度小于速度边界层；

2) 一般的燃烧反应具有较高的活化能，反应集中在热边界层底层；

3) 由布劳修斯方程可以知道 $f^{(3)}(0) = f^{(4)}(0) = 0$，这使得式 (13) 的泰勒展开式具有三阶精度。

在式 (13) 中带入 η 的具体表达式 (8)，此时有

$$\rho u = \rho U f''(0)\sqrt{\frac{U}{2\rho_\infty\mu_\infty(x+L)}}\int_0^y \rho(x,y')\mathrm{d}y' = \frac{\alpha g(x,y)}{\sqrt{x+L}} \tag{14}$$

求解三阶常微分方程 (12) 可以得到上式中，$f''(0)\approx 0.46960$，另外，

$$\begin{aligned}\alpha &= Uf''(0)\sqrt{\frac{U}{2\rho_\infty\mu_\infty}}\\ g(x,y) &= \rho\int_0^y \rho(x,y')\,\mathrm{d}y'\end{aligned} \tag{15}$$

结合方程组 (3) 中的连续方程，有：

$$\rho v = -\int_0^y \frac{\partial\rho(x,y')u(x,y')}{\partial x}\mathrm{d}y' = -\frac{\alpha}{\sqrt{x+L}}\int_0^y\frac{\partial g}{\partial x}\mathrm{d}y' + \frac{\alpha}{2(x+L)^{\frac{3}{2}}}\int_0^y g(x,y')\,\mathrm{d}y' \tag{16}$$

将式 (14)，(16) 带入 L 算子表达式 (4)，得到：

$$L(\cdot) = \frac{\alpha g(x,y)}{\sqrt{x+L}}\frac{\partial}{\partial x} + \left(-\frac{\alpha}{\sqrt{x+L}}\int_0^y\frac{\partial g}{\partial x}\mathrm{d}y' + \frac{\alpha}{2(x+L)^{\frac{3}{2}}}\int_0^y g(x,y')\,\mathrm{d}y'\right)\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\mu\frac{\partial}{\partial y} \tag{17}$$

对于本文提出的热边界层发展滞后于速度边界层的热平板着火问题，主要研究存在热边界层的 $x>0$ 区域，通过待定函数法进行计算，利用如下的自变量 η_1，通过对不同处 x 的 y 坐标进行尺度变换，得到相似解形式：

$$\eta_1 = \frac{ah_1(x)'}{h_1(x)^{\frac{1}{3}}}\int_0^y \rho(x,y')\,\mathrm{d}y' \tag{18}$$

其中 a 为任意的常数，

$$h_1(x) = (L+x)^{\frac{3}{4}} - L^{\frac{3}{4}} \tag{19}$$

令 $\lambda = x$，坐标系从 $(x,y)\to(\lambda,\eta_1)$，带入 (17) 进一步整理得到：

$$L(\cdot) = -\rho_\infty\mu_\infty\rho\frac{a^2h_1'^2}{h_1^{\frac{2}{3}}}\left[\frac{\partial^2}{\partial\eta_1^2} + \frac{\alpha F^2}{3a\rho_\infty\mu_\infty h_1^{\frac{2}{3}}\sqrt{x+L}}\frac{\partial}{\partial\eta_1} - \frac{\alpha F h_1^{\frac{2}{3}}}{a^2\rho_\infty\mu_\infty h_1'^2\sqrt{x+L}}\frac{\partial}{\partial\lambda}\right] \tag{20}$$

其中，

$$F(x,y) = \int_0^y \rho(x,y')\,\mathrm{d}y' \tag{21}$$

可以让待定系数 α 取某个定值来进一步简化式 (20)：

$$a^3 = \frac{16f''(0)}{81\sqrt{2}}\left(\frac{U}{\rho_\infty\mu_\infty}\right)^{\frac{3}{2}} \tag{22}$$

此时，

$$L(\cdot) = -\frac{1}{2\sqrt[3]{36}}f''(0)^{\frac{2}{3}}\rho U\frac{(L+x)^{-\frac{1}{2}}}{\left[(L+x)^{\frac{3}{4}} - L^{\frac{3}{4}}\right]^{\frac{2}{3}}}\times \left\{\frac{\partial^2}{\partial\eta_1^2} + 3\eta_1^2\frac{\partial}{\partial\eta_1} - 12\left[(L+x)^{\frac{3}{4}} - L^{\frac{3}{4}}\right](L+x)^{\frac{1}{4}}\eta_1\frac{\partial}{\partial\lambda}\right\} \tag{23}$$

将算子 (23) 带入式 (3) 中的温度方程，可以得到：

$$\frac{\partial^2 T}{\partial\eta_1^2} + 3\eta_1^2\frac{\partial T}{\partial\eta_1} - 12F_1(x)\eta_1\frac{\partial T}{\partial\lambda} = -\frac{2\sqrt[3]{36}F_2(x)}{f''(0)^{\frac{2}{3}}\rho U}\omega \tag{24}$$

其中，

$$\begin{cases} F_1(x) = \left[(L+x)^{\frac{3}{4}} - L^{\frac{3}{4}}\right](L+x)^{\frac{1}{4}}\\ F_2(x) = \left[(L+x)^{\frac{3}{4}} - L^{\frac{3}{4}}\right]^{\frac{2}{3}}(L+x)^{\frac{1}{2}}\end{cases} \tag{25}$$

能量方程 (24) 同时具有对 η_1 的一阶和二阶偏导项，可以通过以下定义的归一化自变量 η_2 消除其中的一阶导数：

$$W(\eta_1)=\int_0^{\eta_1} e^{-\eta_1^3}\mathrm{d}\eta_1, \eta_2=\frac{W(\eta_1)}{W(\infty)} \tag{26}$$

至此，存在非加热起始段的热平板着火控制方程组 (3) 可以化成：

$$\begin{cases} f'''+ff''=0; \\ \dfrac{\partial^2 Y_F}{\partial\eta_2^2}-12\left(W(\infty)e^{\eta_1^3}\right)^2 F_1(x)\eta_1\dfrac{\partial Y_F}{\partial\lambda}= \\ \qquad \dfrac{2\sqrt[3]{36}\left(W(\infty)e^{\eta_1^3}\right)^2 F_2(x)}{f''(0)^{\frac{2}{3}}\rho U}\omega; \\ \dfrac{\partial^2 T}{\partial\eta_2^2}-12\left(W(\infty)e^{\eta_1^3}\right)^2 F_1(x)\eta_1\dfrac{\partial T}{\partial\lambda}= \\ \qquad -\dfrac{2\sqrt[3]{36}\left(W(\infty)e^{\eta_1^3}\right)^2 F_2(x)}{f''(0)^{\frac{2}{3}}\rho U}\omega \end{cases} \tag{27}$$

通过后文的摄动分析表明，在着火距离之前，能量方程和组分方程中的 $\eta_1\dfrac{\partial}{\partial\lambda}$ 项远小于另外两项，与垂直壁面方向的扩散相比是三阶小量，因此可进一步忽略简化，得到的常微分方程组形式如下：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2 Y_F}{\mathrm{d}\eta_2^2}=\dfrac{2\sqrt[3]{36}W(\infty)^2 F_2(x)}{f''(0)^{\frac{2}{3}}\rho U}\omega; \\ \dfrac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}\eta_2^2}=-\dfrac{2\sqrt[3]{36}W(\infty)^2 F_2(x)}{f''(0)^{\frac{2}{3}}\rho U}\omega \end{cases} \tag{28}$$

边界条件为：

$$\begin{cases} \eta_2=0: \dfrac{\mathrm{d}Y_\mathrm{F}}{\mathrm{d}\eta_2}=0, \quad T=T_\mathrm{w} \\ \eta_2=1: Y_\mathrm{F}=Y_{\mathrm{F},\infty}, \quad T=T_\infty \end{cases} \tag{29}$$

而对比不存在非加热起始段的热平板着火局部相似方程组 [9]：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2 Y_\mathrm{F}}{\mathrm{d}\xi^2}=\dfrac{2x}{\rho U f''(0)^2}\omega \\ \dfrac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}\xi^2}=-\dfrac{2x}{\rho U f''(0)^2}\omega \end{cases} \tag{30}$$

可以发现方程组 (27) 和 (30) 形式完全相同，且边界条件以及自变量 η_2 与的 ξ 取值范围相同，所以对于温度边界层和速度边界层不是同时开始发展的情况，着火距离仍然可以得到局部相似解 [4]，通过对比 (27) 和 (30) 右端即可简单地求得：

$$\frac{2\sqrt[3]{36}W(\infty)^2 F_2(x_{\mathrm{L,I}})}{f''(0)^{\frac{2}{3}}\rho U}=\frac{2x_\mathrm{I}}{\rho U f''(0)^2} \tag{31}$$

定义如下的广义着火距离 [4]：

$$\chi=x\left(\frac{2B}{U}\right)\left(\frac{W_\mathrm{F}\nu_\mathrm{F}}{W_\mathrm{O}^{\nu_\mathrm{O}}W_\mathrm{F}^{\nu_\mathrm{F}}}\right) \left(\frac{p\bar{W}}{R^0}\right)^{\nu_\mathrm{O}+\nu_\mathrm{F}-1}\left(\frac{h_c^0}{c_p}\right)^{\alpha-(\nu_\mathrm{O}+\nu_\mathrm{F})+1} \tag{32}$$

最终解得：

$$\chi_{\mathrm{L,I}}=L_\chi\left(\left(\frac{1+\sqrt{1+4\left(\dfrac{k\chi_\mathrm{I}}{L_\chi}\right)^{\frac{3}{2}}}}{2}\right)^{\frac{4}{3}}-1\right) \tag{33}$$

其中，

$$k=\frac{1}{\sqrt[3]{36}W(\infty)^2 f''(0)^{\frac{4}{3}}}\approx \frac{1}{3.30193\cdot 0.89298^2\cdot 0.46960^{\frac{4}{3}}}\approx 1.0405 \tag{34}$$

所以只要知道了恒温热平板着火距离 χ_I，就可以由公式 (33) 直接计算出任意广义非加热起始段长度 L_χ 条件下的着火距离 $\chi_{\mathrm{L,I}}$。

当 $\chi_\mathrm{I}/L_\chi\ll 1$, 方程 (33) 可以化为：

$$\chi_{\mathrm{L,I}}\approx\frac{4}{3}L_\chi\left(\frac{k\chi_\mathrm{I}}{L_\chi}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{4}{3}k\chi_\mathrm{I}^{\frac{3}{2}}L_\chi^{-\frac{1}{2}} \tag{35}$$

此时的广义着火距离 $\chi_{\mathrm{L,I}}$ 将与广义非加热起始段长度 L_χ 的平方根成反比。随着非加热起始段长度的增加，着火距离减小的速度逐渐放缓。

3 渐进分析

至此已将非加热起始段的热平板着火控制方程组 (3) 简化成了与无非加热起始段热平板着火控制方程组 [4] 相同的形式，因此，可以使用匹配渐进分析方法进一步推导出理论解 (也可以认为式 (33) 的唯一未知量是 χ_I，直接利用 Law[4] 关于恒温平板着火距离理论解代入)。

首先是利用小量 $\chi=\beta\eta_2/\epsilon$ 扩展边界层内侧的反应—扩散控制区域，做坐标系转换 $(\zeta,\xi)\rightarrow(\tau,\chi)$，其中 $\tau=\zeta=x$，方程组 (27) 中的能量方程化为：

$$\frac{\partial^2 T}{\partial\eta_2^2}-12\left(W(\infty)e^{\eta_1^3}\right)^2 F_1(x)\eta_1\left(\frac{\varepsilon}{\beta}\right)^3\frac{\partial T}{\partial\lambda}= -\frac{2\sqrt[3]{36}\left(W(\infty)e^{\eta_1^3}\right)^2 F_2(x)}{f''(0)^{\frac{2}{3}}\rho U}\left(\frac{\varepsilon}{\beta}\right)^2\omega \tag{36}$$

从上式中看出 $\frac{\partial}{\partial\lambda}$ 这一项相比于 $\frac{\partial^2}{\partial\eta_2^2}$ 项是三阶小量，可以消去，又因为反应主要存在于 $\eta_1\to 0$ 的区域，所以进一步化为：

$$\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}\eta_2^2}=-\frac{2\sqrt[3]{36}W(\infty)^2F_2(x)}{f''(0)^{\frac{2}{3}}\rho U}\left(\frac{\varepsilon}{\beta}\right)^2\omega \tag{37}$$

假设在反应内区的组分浓度变化对反应速率的影响不大 (主要考虑温度的影响)，Y_{F} 和 Y_{O} 作为定值。本文的数值计算结果表明，在着火距离之前这个假设是合理的。在边界层反应内区进行温度摄动 [4] 并带入反应速率表达式，方程 (37) 可以化为：

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}\chi^2}=-\frac{\varDelta_L}{2}\exp(\theta-\chi) \tag{38}$$

其中 θ 为热边界层反应内区的一级摄动温度，$\varDelta_L$ 相当于此物理过程的邓克尔数：

$$\varDelta_L=\sqrt[3]{36}W(\infty)^2f''(0)^{\frac{4}{3}}\frac{F_2(x)}{x}\varDelta \tag{39}$$

其中 $\varDelta$ 为恒温热平板着火问题中的邓克尔数：

$$\varDelta=\frac{\varepsilon}{\beta^2}\frac{4x}{\left(\frac{p\bar{W}}{R^0}\right)Uf''(0)^2}\left(\frac{h_c^0}{c_p}\right)^{\alpha-(\nu_{\mathrm{O}}+\nu_{\mathrm{F}})+1}\times$$
$$AT_{\mathrm{w}}^{\alpha-(\nu_{\mathrm{O}}+\nu_{\mathrm{F}})+1}\exp\left(-\frac{T_a}{T_{\mathrm{w}}}\right)Y_{\mathrm{O}}^{\nu_{\mathrm{O}}}Y_{\mathrm{F}}^{\nu_{\mathrm{F}}} \tag{40}$$

当 $\frac{x}{L}\ll 1$，则有

$$\varDelta_L\approx\frac{3\sqrt[3]{6}}{2}W(\infty)^2f''(0)^{\frac{4}{3}}\left(\frac{x}{L}\right)^{-\frac{1}{2}}\varDelta \tag{41}$$

$\varDelta_{\mathrm{L}}=1$ 时正好对应壁面附近温度梯度为 0，化学反应达到了自维持状态，可以由此得到存在非加热起始段时的热平板着火距离理论解，理论解形式上与式 (33) 相同，只是此时 χ_{I} 不需要求解常微分方程组，有理论表达式 [4]：

$$\chi_{\mathrm{I}}=\frac{(T_{\mathrm{w}}-T_\infty)^2f''(0)^2\exp\left(\frac{E_a}{R^0T_{\mathrm{w}}}\right)E_a}{2R^0T_{\mathrm{w}}^{\alpha-(\nu_{\mathrm{O}}+\nu_{\mathrm{F}})+3}Y_{\mathrm{O}}^{\nu_{\mathrm{O}}}Y_{\mathrm{F}}^{\nu_{\mathrm{F}}}} \tag{42}$$

4 数值计算分析

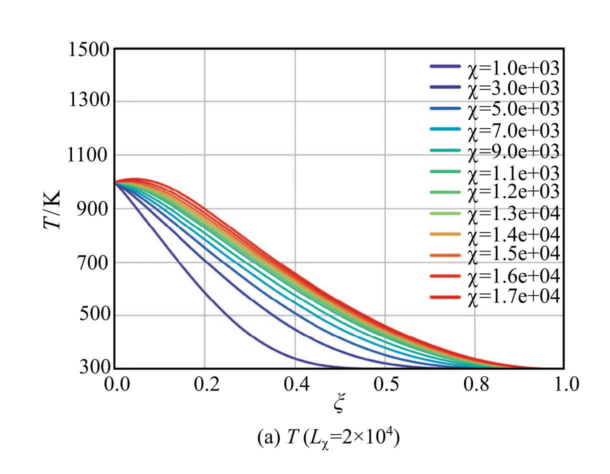
本章采用二阶精度的隐式有限差分方法，对偏微分方程组 (3) 结合边界条件 (7) 进行数值求解。因为边界层方程属于抛物型偏微分方程，可以只对 η 方向进行隐式求解，而 x 方向作为解的推进方向。数值计算采用的参数如下 [4]：

$$\alpha=\nu_{\mathrm{O}}=\nu_{\mathrm{F}}=1;Y_{\mathrm{F},\infty}=Y_{\mathrm{O},\infty}=0.2;$$

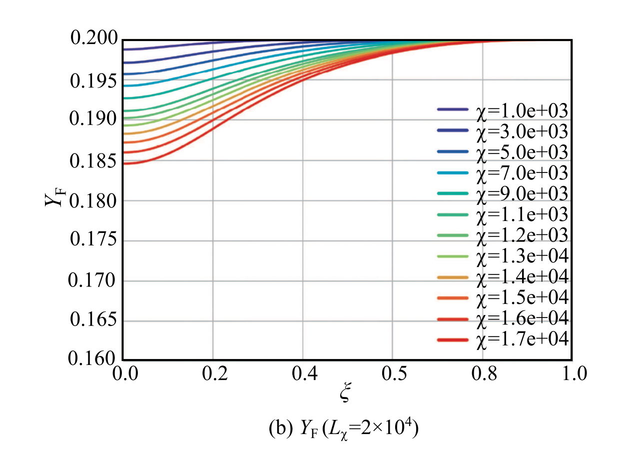
$$T_{\mathrm{w}}=10^3\mathrm{K};T_a=10^4\mathrm{K};T_\infty=300\mathrm{K}$$

根据之前的理论分析，壁面附近温度梯度为 0 的点 $\left(\left.\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\xi}\right|_{\xi=0}=0\right)$ 可以作为着火点。着火距离为平板加热段前缘与着火点间的距离。文献 [4] 恒温条件下的热平板着火距离 $\chi_{\mathrm{I}}=1.56\times10^4$，图 2 中给出的 3 个算例对应的无量纲非加热起始段长度 L_χ 分别为 2×10^4，4×10^4 和 6×10^4，与常温热平板着火距离比值分别约为 1.3，2.6 和 3.8。

图 2 显示了在不同非加热长度下沿流线方向平板边界层的温度场和组分场分布，从温度分布图 2(a)，2(c) 和 2(e) 中可以看出，存在非加热起始段时温度边界层小于速度边界层，即使已经假设普朗特数为 1，两者也不再相似。$L_\chi=2\times10^4$ 时对应 $\chi_{\mathrm{L,I}}=1.33\times10^4$，$L_\chi=4\times10^4$ 时对应 $\chi_{\mathrm{L,I}}=1.11\times10^4$，而 $L_\chi=6\times10^4$ 时 $\chi_{\mathrm{L,I}}=0.96\times10^4$，对于 L_χ 不是远小于 χ_{I} 的情况，增加非加热起始段长度使着火



(a) T ($L_\chi=2\times10^4$)



(b) Y_{F} ($L_\chi=2\times10^4$)

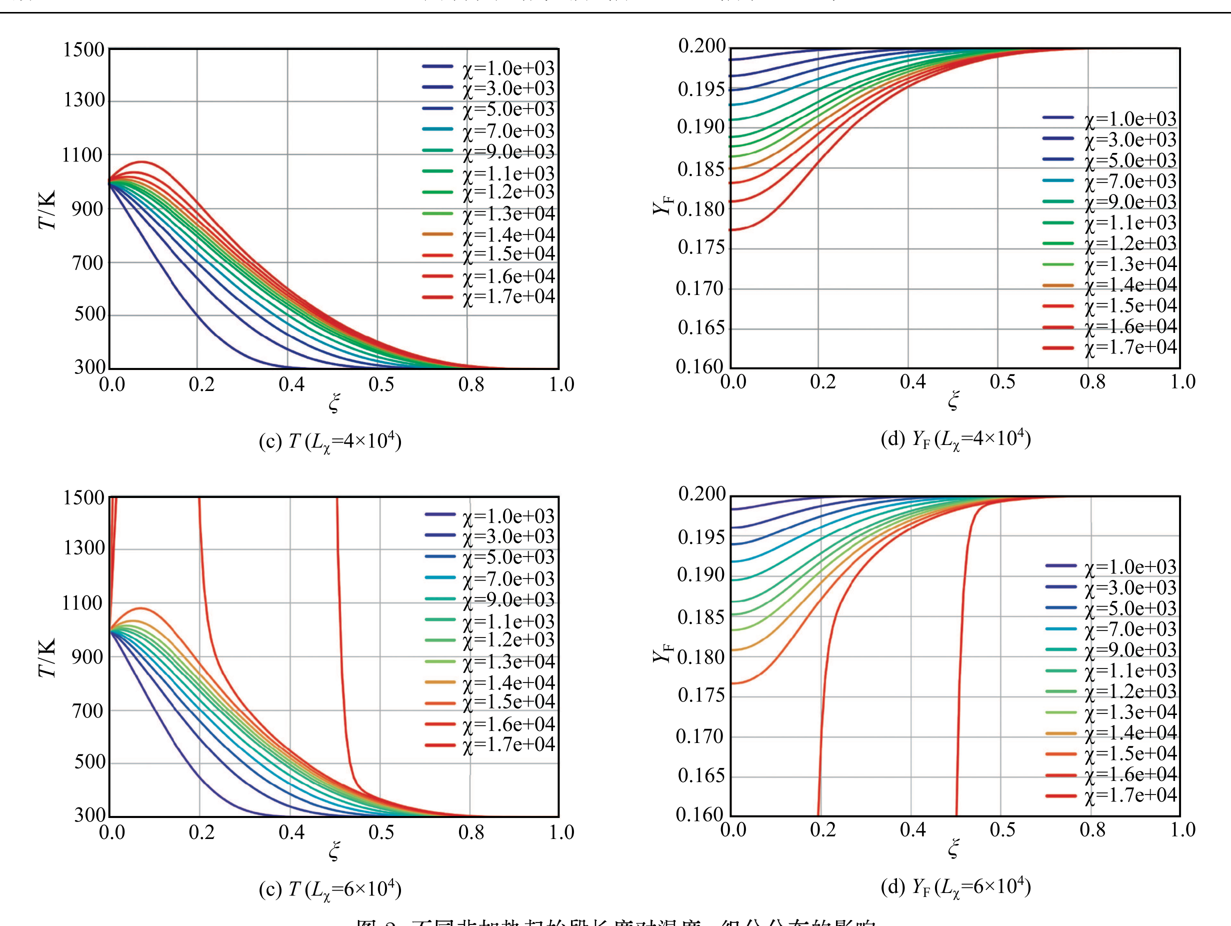


图 2　不同非加热起始段长度对温度、组分分布的影响

Fig. 2　The effect of the length L_χ of unheated section on the Profiles of temperature and concentration along streamlines

距离减小。这是因为非加热起始段长度加长会使热边界层内的流速相对减小，从拉格朗日坐标系来看，流体微团在移动固定距离时耗时更长，反应累积放热量更多，这最终导致着火距离缩短。

图 3 中实心点代表的是从不同 L_χ 的热平板平板着火数值算例中提取出的着火距离，而实线是利用局部相似解 (33) 计算得到的。局部相似解只需要求解一次 $L_\chi = 0$ 时的常微分方程组，对于任意的 L_χ 都可以直接得到对应的着火距离 $\chi_{\rm L,I}$。发现当 $L_\chi > 5000$，也相当于是 $\chi_{\rm I}/L_\chi < 3$ 的时候，局部相似解和数值解的误差在 5%以内，两条曲线的趋势一致，可见局部相似解非常好地描述了存在非加热起始段下的着火过程。局部相似解之所以在 $\chi_{\rm I}/L_\chi$ 较大的时候失效，是因为推导过程中假设了在加热段的附面边界层中无量纲流函数为线性分布，而这显然在非加热起始段较短的情况下误差是比较大的，此时速度边界层还比较薄，线性假设会使得边界层内的流速被高估，从而也就高估了着火距离。局部相似解在所有的区域都会稍微大于数值解。

而对于用匹配渐进分析法得到的理论解，参考 Law 的数值分析结果 [4]，其误差源自局部相似假设和匹配近似两方面，根据上面的数值分析，可以知道局部相似假设带来的误差远小于匹配近似带来的误差 (50%左右)，所以理论解误差主要源自匹配近似的过程。

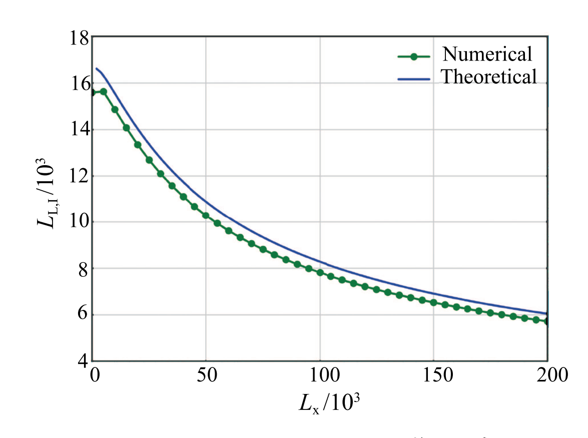


图 3　不同长度非加热起始段下着火距离

Fig. 3　Dimensionless ignition distance $\chi_{\rm L,I}$ for different unheated inlet length L_χ

5　结　论

本文对存在常温非加热起始段的热平板着火问

题展开了求解，基于热边界层中沿平板方向速度 u 与 η 线性相关的假设，对物理坐标采用适当的尺度变换，可以推导出该问题的局部相似解。关于速度 u 与 η 线性相关的假设合理性源自三个方面：1) 热边界层滞后速度边界层；2) 高活化能反应集中于高温区域；3) 壁面附近 $f^{(3)}(0) = f^{(4)}(0) = 0$。根据数值计算，局部相似解与数值解吻合良好。

利用匹配渐进展开法可以进一步将局部相似解推出理论解，理论解的误差主要源自匹配近似的过程。

具体的理论推导过程可以进一步推广到小角度二维楔形体、小角度旋转体等存在非加热起始段条件下炽热表面的着火问题，对任意温度分布的热平板着火问题具有借鉴意义。另外，由于存在非加热起始段条件下热边界层和速度边界层两者间本身就不存在相似性，可以去除质量、动量和能量扩散系数都相等的假设。

参 考 文 献

[1] MARBLE F E. Ignition and Combustion in a Laminar Mixing Zone [J]. Journal of Jet Propulsion, 1954, 24(2): 85–94

[2] TOONG T-Y. Ignition and Combustion in a Laminar Boundary Layer Over a Hot Surface [C]//Proceedings of the Symposium (International) on Combustion, F, Elsevier, 1957

[3] LAW C. On the Stagnation-Point Ignition of a Premixed Combustible [J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 1978, 21(11): 1363–1368

[4] LAW C, LAW H. Thermal-Ignition Analysis in Boundary-Layer Flows [J]. Journal of Fluid Mechanics, 1979, 92(1): 97–108

[5] LAW C K. Transient Ignition of a Combustible by Stationary Isothermal Bodies [J]. Combustion Science and Technology, 1979, 19(5-6): 237–242

[6] ZIEMER R W. Flame Stabilization in the Boundary Layer of Heated Plates [J]. Journal of Jet Propulsion, 1958, 28(9): 592-599

[7] WU W, TOONG T. Further Study on Flame Stabilization in a Boundary Layer: A Mechanism of Flame Oscillations [C]//Proceedings of the Symposium (International) on Combustion, F, Elsevier, 1963

[8] CHAPMAN D R. Temperature and Velocity Profiles in the Compressible Laminar Boundary Layer with Arbitrary Distribution of Surface Temperature [J]. Journal of the Aeronautical Sciences (Institute of the Aeronautical Sciences), 1949, 16(9): 547–565

[9] LAW C K. Combustion physics [M]. Cambridge University Press, 2010